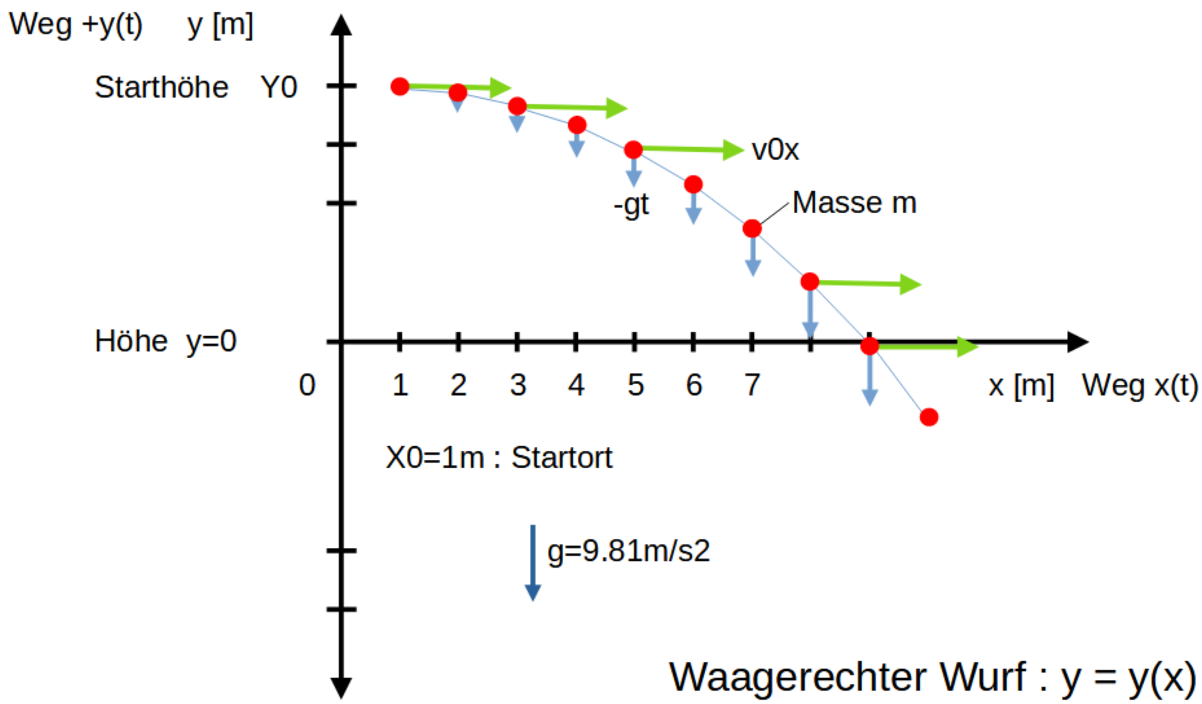
Waagerechter Wurf

Übersicht



- Bewegung in der X/Y-Ebene:
- Die Masse m wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{0x} in positive X-Richtung geworfen.
- Während des Fluges wirkt die Erdbeschleunigung g auf die Masse m und erzeugt eine Geschwindigkeits- und damit eine Orts-Komponente in negativer y-Richtung.
- Masse m, Erdbeschleunigung g und Anfangsgeschwindigkeit v_{0x} sind konstant und frei wählbar.
- Beide Bewegungen in X und Y sind voneinander unabhängig (SPP - SuperPositionsPrinzip).

Weg-Zeit-Funktionen $x(t), y(t)$ des Senkrechten Wurfs:

$\boxed{x(t) = v_{0x}t + x_0}$ (1)

$\boxed{y(t) = y_0 - \frac{gt^2}{2}}$ (2)

Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen $v_x(t), v_y(t)$ des Senkrechten Wurfs:

$\boxed{v_x = v_{0x} = const}$ (3)

$\boxed{v_y = v_{gy} = -gt}$ (4)

Wurfweite x_w :

$$\boxed{x_w = x_0 + v_{0x}\sqrt{\frac{2y_0}{g}}} \quad (7)$$

Wurfdauer t_d :

$$\boxed{t_d = \frac{x_w - x_0}{v_{0x}}} \quad (8)$$

Aufprallgeschwindigkeit v_p :

$$\boxed{v_p = \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{g^2}{v_{0x}^2}[x_w - x_0]^2}} \quad (9)$$

Bahnkurve $y = y(x)$:

$$\boxed{y(x) = y_0 - \frac{g[x - x_0]^2}{2v_{0x}^2}} \quad (10)$$

Herleitung

Geschwindigkeiten:

Abwurf-Geschwindigkeit in positiver x-Richtung

$\boxed{v_x = v_{0x} = const}$ (3)

Fallgeschwindigkeit in negativer y-Richtung

$\boxed{v_y = v_{gy} = -gt}$ (4)

Ortsfunktionen durch Integration (mit Integrationskonstanten):

$$x(t) = \int_t v_{0x} dt$$

$\boxed{x(t) = v_{0x}t + x_0}$ (1)

$$y(t) = \int_t (-gt) dt$$

$$\boxed{y(t) = y_0 - \frac{gt^2}{2}} \quad (2)$$

Die Bewegungskurve $y = y(x)$ muss aus beiden Gleichungen (1) und (2) t eleminiert werden:

$$x = v_{0x}t + x_0$$

$$x - x_0 = v_{0x}t$$

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}} \quad (5)$$

$$y - y_0 = -\frac{gt^2}{2}$$

$$y - y_0 = -\frac{g[\frac{x - x_0}{v_{0x}}]^2}{2}$$

$$y - y_0 = -\frac{g(x - x_0)^2}{2v_{0x}^2}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2 + y_0} \quad (6)$$

Damit folgt aus der Bahnkurve $0y = y(x)$ des Waagerechten Wurfs in Gleichung (6) eine halbe nach unten geöffnete Parabel.
Die Integrationskonstanten x0 und y0 geben die Verschiebung des Scheitelpunkts der Parabel vom Koordinaten-Ursprung an.

Weitere Berechnungen

Wurfweite

Bedingung: $y(x_w) = 0$ in (6) einsetzen

$$y(x_w) = 0 = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(x_w - x_0)^2 + y_0$$

$$y_0 = \frac{g}{2v_{0x}^2}(x_w - x_0)^2$$

$$(x_w - x_0)^2 = \frac{2y_0 v_{0x}^2}{g}$$

$$x_w - x_0 = v_{0x}\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

$$\boxed{x_w = x_0 + v_{0x}\sqrt{\frac{2y_0}{g}}}\ (7)$$

($y_0 > 0$: muss für die Existenz einer Wurfweite gegeben sein!)

Wurfdauer

Wurfweite x_w in Gleichung (5) einsetzen:

$$\boxed{t_w = \frac{x_w - x_0}{v_{0x}}}\ (8)$$

Aufprallgeschwindigkeit

Geschwindigkeit in x-Richtung:

$v_x = v_{0x} = const$ (3)

Geschwindigkeit in y-Richtung:

$v_y(t_w) = -gt_w$ (4)

Aufprallgeschwindigkeit aus Superpositionsprinzip der Geschwindigkeiten:

$$v_p = \sqrt{v_x^2 + v_y^2(t_w)}$$

$$v_p = \sqrt{v_{0x}^2 + g^2 t_w^2}$$

Mit Gleichung (8) folgt:

$$v_p = \sqrt{v_{0x}^2 + g^2[\frac{x_w - x_0}{v_{0x}}]^2}$$

$$\boxed{v_p = \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{g^2}{v_{0x}^2}[x_w - x_0]^2}}\ (9)$$