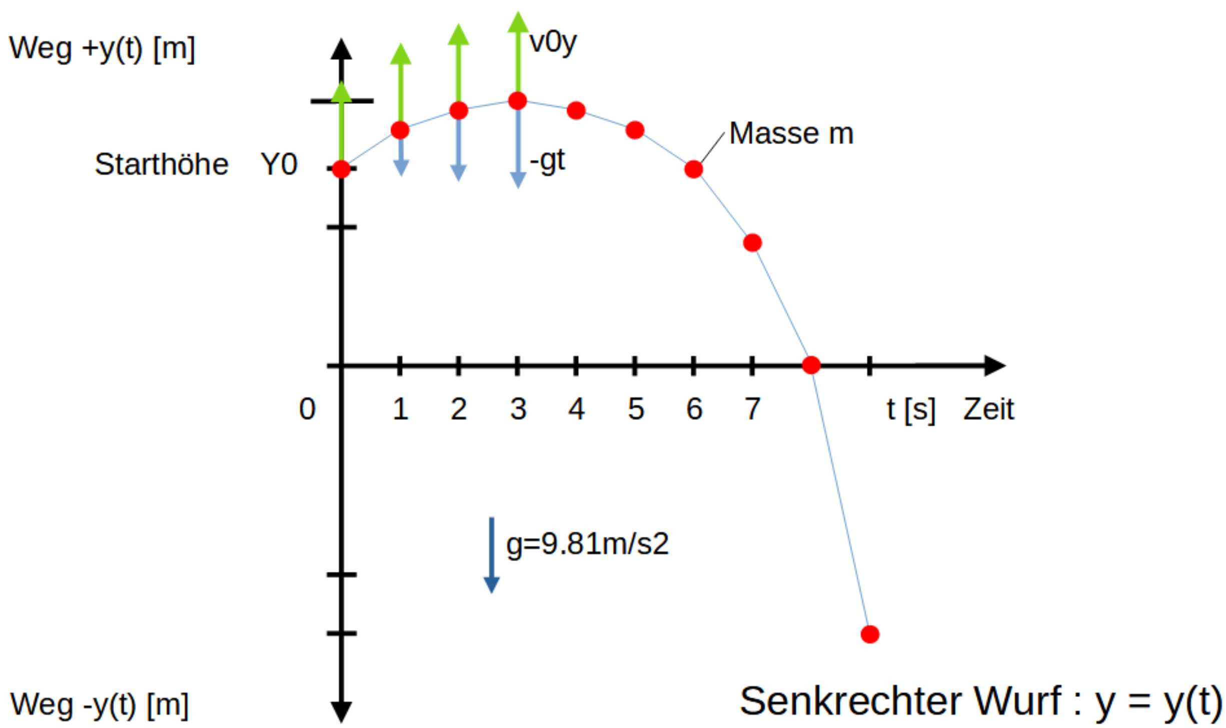
Senkrechter Wurf

Übersicht



- Die Masse m wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{0y} in positive Y-Richtung geworfen.
- Während des Fluges wirkt die Erdbeschleunigung g auf die Masse m als negative Beschleunigung
  in negativer y-Richtung.
- Masse m, Erdbeschleunigung g und Anfangsgeschwindigkeit v_{0y} sind konstant.

Weg-Zeit-Funktionen $y(t)$ des Senkrechten Wurfs:

$$\boxed{y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} + y_0} \quad (1)$$

Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen $v_y(t)$ des Senkrechten Wurfs:

$$\boxed{v_y(t) = v_{0y} - gt} \quad (2)$$

Steigzeit t_h :

$$\boxed{t_h = \frac{v_{0y}}{g}} \quad (3)$$

Wurfhöhe y_h :

$$\boxed{y_h(t_h) = \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0} \quad (4)$$

Wurfdauer t_d :

$$\boxed{t_d = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}} \quad (5)$$

Aufprallgeschwindigkeit v_p :

$$\boxed{v_p(t_d) = -\sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}} \quad (6)$$

Herleitung

Geschwindigkeit in y-Richtung setzt sich zusammen aus

- $v_{gy} = -gt$: Fallgeschwindigkeit in negativer y-Richtung
- $v_{0y} = const$: Steiggeschwindigkeit in positiver y-Richtung

$$\boxed{v_y(t) = v_{0y} - gt} \quad (2)$$

Weg-Zeit-Funktion durch Integration:

$$y(t) = \int_t v_y(t)dt$$

$$y(t) = \int_t v_{0y}dt - \int_t gtdt$$

mit der Integrationskonstanten y_0 :

$$\boxed{y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} + y_0} \quad (1)$$

Weitere Berechnungen

Steigzeit

Mit (2) : Wurfhöhe erreicht, wenn v_{0y} identisch v_{gy} und damit die resultierende Geschwindigkeit gleich null ist.

$$v_y(t_h) = v_{0y} - gt_h = 0$$

$$gt_h = v_{0y}$$

Zeit, bis Steighöhe erreicht ist:

$$\boxed{t_h = \frac{v_{0y}}{g}} \text{ (3)}$$

Wurfhöhe

Aus (1) resultiert die Wurfhöhe $y_h(t_h)$:

$$y_h(t_h) = v_{0y}t_h - \frac{gt_h^2}{2} + y_0$$

$$y_h(t_h) = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{g[\frac{v_{0y}}{g}]^2}{2} + y_0$$

$$y_h(t_h) = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0$$

$$\boxed{y_h(t_h) = \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0} \text{ (4)}$$

Wurfdauer

Wurfdauer entspricht der Zeit, bis $y(t_d) = 0$ ist :

$$y(t_d) = 0 = v_{0y}t_d - \frac{gt_d^2}{2} + y_0$$

$$0 = -\frac{2v_{0y}t_d}{g} + t_d^2 - \frac{2y_0}{g}$$

$$0 = t_d^2 - \frac{2v_{0y}t_d}{g} - \frac{2y_0}{g}$$

$$P := \frac{v_{0y}}{g}$$

$$Q := -\frac{2y_0}{g}$$

$$0 = t_d^2 - 2Pt_d + Q$$

$$0 = t_d^2 - 2Pt_d + P^2 - P^2 + Q$$

$$0 = [t_d - P]^2 - P^2 + Q$$

$$[t_d - P]^2 = P^2 - Q$$

$$t_d - P = \pm\sqrt{P^2 - Q}$$

$$t_d = P \pm \sqrt{P^2 - Q}$$

$$\boxed{t_d = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}} \text{ (5)}$$

Aufprallgeschwindigkeit

Aus (2) und (5) folgt für die Geschwindigkeit:

$$v_y(t_d) = v_{0y} - gt_d \text{ (2)}$$

$$t_d = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}} \text{ (5)}$$

$$v_p(t_d) = v_{0y} - g[\frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}]$$

$$v_p(t_d) = v_{0y} - v_{0y} \mp \sqrt{g^2\frac{v_{0y}^2}{g^2} + g^2\frac{2y_0}{g}}$$

$$\boxed{v_p(t_d) = -\sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}} \text{ (6)}$$