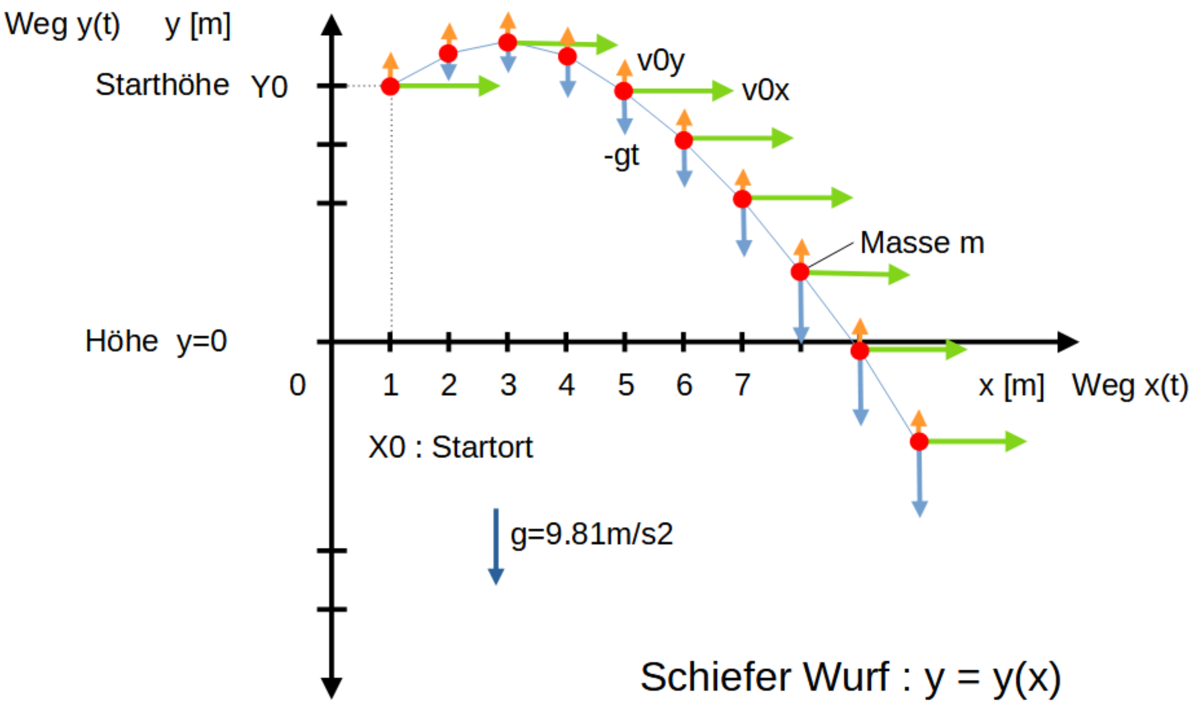
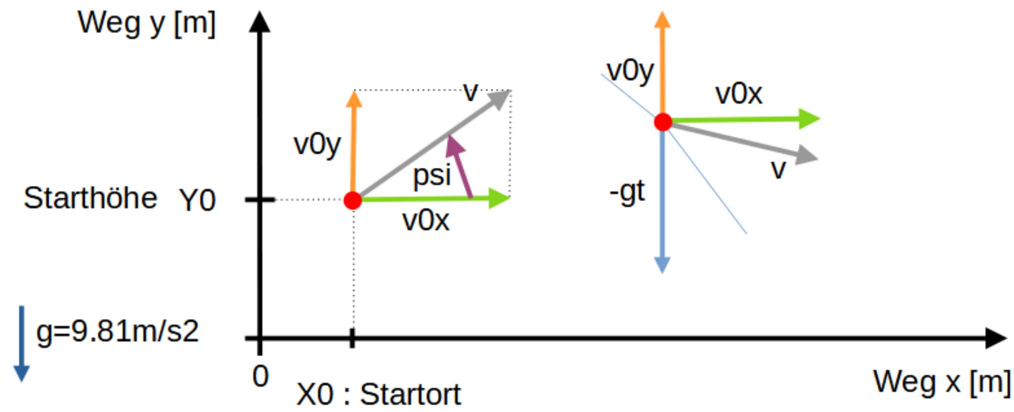
Schiefer Wurf

Übersicht



- Die Masse m wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Anfangswinkel ψ in der X/Y-Ebene geworfen.
- Während des Fluges wirkt die Erdbeschleunigung g auf die Masse m.
- Masse m, Erdbeschleunigung g und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$ sind konstant.
- $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$: Geschwindigkeitskomponenten in X/Y-Richtung
- Beide Bewegungen in X und Y sind voneinander unabhängig (SPP - SuperPositionsPrinzip).



Schiefer Wurf : Addition der Geschwindigkeiten

Die Addition der Geschwindigkeiten erfolgt nach dem Vektor-Additionsgesetz:
Vektor-Addition der Geschwindigkeiten :

$\boxed{v_x(t) = v(t) \cdot \cos(\psi)}$ (17)

$\boxed{v_y(t) = v(t) \cdot \sin(\psi)}$ (18)

$\boxed{v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}}$ (19)

Weiterhin folgen die nachfolgenden Gesetze des Schiefen Wurfs:

Weg-Zeit-Funktionen $x(t), y(t)$ des Schiefen Wurfs:

$\boxed{x(t) = v_{0x}t + x_0}$ (5)

$\boxed{y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} + y_0}$ (6)

Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen $v_x(t), v_y(t)$ des Schiefen Wurfs:

$\boxed{v_x(t) = v_{0x}}$ (3)

$\boxed{v_y(t) = -gt + v_{0y}}$ (4)

Steigzeit t_s :

$$\boxed{t_s = \frac{v_{0y}}{g}} \quad (7)$$

Wurfhöhe y_h :

$$\boxed{y_h = \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0} \quad (8)$$

Wurfzeit t_w :

$$\boxed{t_w = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}} \quad (9)$$

Wurfweite x_w :

$$\boxed{x_w = x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} + v_{0x}\sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}} \quad (10)$$

Bahnkurve $y = y(x)$:

$$\boxed{y = y_0 + (x - x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x - x_0]^2} \quad (12)$$

Aufprallgeschwindigkeit v_p (mit Wurfzeit t_w):

$$\boxed{v_p = \sqrt{v_{0x}^2 + [v_{0y} - gt_w]^2}} \quad (16)$$

Herleitung

Analog zum freien Fall und mit dem SPP gelten die Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{v_x(t) = v_{0x}} \quad (1)$$

$$\boxed{v_y(t) = -gt + v_{0y}} \quad (2)$$

mit

$$\boxed{v_{0x} = v_0 \cos(\phi)} \quad (3)$$

$$\boxed{v_{0y} = v_0 \sin(\phi)} \quad (4)$$

Integration beider Funktion (1) und (2) über die Zeit ergibt:

$$\boxed{x(t) = v_{0x}t + x_0} \quad (5)$$

$$\boxed{y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} + y_0}$$ (6)

mit den wählbaren Integrationskonstanten x_0 und y_0 (Anfangsort).

Weitere Berechnungen

Steigzeit

Bedingung mit (2):

$$v_y(t_s) = 0 = -gt_s + v_{0y}$$

$$gt_s = v_{0y}$$

$$\boxed{t_s = \frac{v_{0y}}{g}}$$ (7)

Wurfhöhe

Steigzeit (7) in (6) einsetzen:

$$y_h(t_s) = v_{0y}t_s - \frac{gt_s^2}{2} + y_0$$

$$y_h = v_{0y}[\frac{v_{0y}}{g}] - \frac{g[\frac{v_{0y}}{g}]^2}{2} + y_0$$

$$y_h = \frac{v_{0y}^2}{g} - g\frac{v_{0y}^2}{2g^2} + y_0$$

$$y_h = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0$$

$$\boxed{y_h = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}}$$ (8)

Wurfzeit

Bedingung: (6) identisch Null

$$y(t_w) = 0 = v_{0y}t_w - \frac{gt_w^2}{2} + y_0$$

$$0 = v_{0y} t_w - \frac{g t_w^2}{2} + y_0$$

$$0 = t_w^2 - 2 \frac{v_{0y}}{g} t_w - \frac{2 y_0}{g}$$

$P := \dfrac{v_{0y}}{g}$ und $Q := \dfrac{2 y_0}{g}$

$$0 = t_w^2 - 2 P t_w - Q$$

Quadratische Ergänzung:

$$0 = t_w^2 - 2 P t_w + P^2 - P^2 - Q$$

$$0 = [t_w - P]^2 - P^2 - Q$$

$$[t_w - P]^2 = P^2 + Q$$

$$t_w = P \pm \sqrt{P^2 + Q}$$

Zurück-einsetzen P, Q :

$$t_w = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{[\frac{v_{0y}}{g}]^2 + \frac{2 y_0}{g}}$$

$$\boxed{t_w = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2 y_0}{g}}} \quad (9)$$

Die Wurfzeit t_w hängt damit nur von der Y-Bewegung ab.

Wurfweite

Bedingung: Wurfzeit t_w (9) in $x(t)$ (5) einsetzen

$$x(t_w) = x_w = v_{0x} t_w + x_0$$

$$x_w = v_{0x} [\frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2 y_0}{g}}] + x_0$$

$$\boxed{x_w = x_0 + \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} + v_{0x} \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2 y_0}{g}}} \quad (10)$$

Bahnkurve

Die Bahnkurve $y = y(x)$ ergibt sich aus der Elemination von t in (5) und (6):

Aus (5) folgt:
$x = v_{0x}t + x_0$
$\boxed{t = \frac{x}{v_{0x}} - \frac{x_0}{v_{0x}}}$ (11)

t einsetzen in (6)
$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} + y_0$$

ergibt:
$$y = v_{0y}[\frac{x}{v_{0x}} - \frac{x_0}{v_{0x}}] - \frac{g[\frac{x}{v_{0x}} - \frac{x_0}{v_{0x}}]^2}{2} + y_0$$
$$y = \frac{xv_{0y}}{v_{0x}} - \frac{x_0v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x - x_0]^2 + y_0$$
$$\boxed{y = y_0 - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x - x_0]^2 + (x - x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}}} \text{ (12)}$$

Die Bahnkurve $y = y(x)$ zeigt sich als eine nach unten geöffnete und verschobene Parabel mit Abwurfpunkt (x_0, y_0).

Alternative Berechnung der Wurfweite

Die Wurfweite x_w wird nach Abwurf am Punkt (x_0, y_0) am Schnittpunkt der Bahnkurve mit der X-Achse erreicht.

Bedingung mit (12) $y := 0$ für die Wurfweite x_w:
$$y = 0 = y_0 + (x_w - x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x_w - x_0]^2$$
$$0 = y_0 + (x_w - x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x_w^2 - 2x_wx_0 + x_0^2] \quad \Big| \cdot -\frac{2v_{0x}^2}{g}$$
$$0 = -\frac{2v_{0x}^2y_0}{g} - (x_w - x_0)\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} + x_w^2 - 2x_wx_0 + x_0^2$$
$$0 = x_w^2 - x_w\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} - 2x_wx_0 + x_0^2 + \frac{2v_{0x}v_{0y}x_0}{g} - \frac{2v_{0x}^2y_0}{g}$$

$$0 = x_w^2 - 2x_w\left[\frac{v_{0x}v_{0y}}{g} + x_0\right] + \left[x_0^2 + \frac{2v_{0x}}{g}(v_{0y}x_0 - v_{0x}y_0)\right]$$

$$P := \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} + x_0$$

$$Q := x_0^2 + \frac{2v_{0x}}{g}(v_{0y}x_0 - v_{0x}y_0)$$

$$0 = x_w^2 - 2Px_w + Q$$

Quadratische Ergänzung:

$$0 = x_w^2 - 2Px_w + P^2 - P^2 + Q$$

$$0 = (x_w - P)^2 - P^2 + Q$$

$$(x_w - P)^2 = P^2 - Q$$

$$x_w - P = \pm\sqrt{P^2 - Q}$$

$$x_w = P \pm \sqrt{P^2 - Q}$$

P, Q zurück eingesetzt:

$$x_w = x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \pm \sqrt{[\frac{v_{0x}v_{0y}}{g} + x_0]^2 - x_0^2 - \frac{2v_{0x}}{g}(v_{0y}x_0 - v_{0x}y_0)}$$

$$x_w = x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0x}^2v_{0y}^2}{g^2} + x_0^2 + \frac{2v_{0x}v_{0y}x_0}{g} - x_0^2 - \frac{2v_{0x}v_{0y}x_0}{g} + \frac{2v_{0x}^2y_0}{g}}$$

$$x_w = x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0x}^2v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2v_{0x}^2y_0}{g}}$$

$$\boxed{x_w = x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \pm v_{0x}\sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}} \quad (13)$$

Damit ist die alternative Wurfweite (13) identisch mit der Wurfweite in (10).

Alternative Berechnung der Wurfhöhe

Gesucht wird das Maximum der Bahnkurve $y = y(x)$ (12):

$$!max(y = (x - x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x - x_0]^2 + y_0)$$

Erste Ableitung nach x auf Null setzen -> Maximum an der Stelle x_h:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x_h - x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x_h - x_0]^2 + y_0\right] = 0$$

$$0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}[x_h - x_0]$$

$$0 = v_{0x}v_{0y} - g[x_h - x_0]$$

$$g[x_h - x_0] = v_{0x}v_{0y}$$

$$\boxed{x_h = x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}} \quad (14)$$

Somit ergibt sich x_h als die Stelle mit der maximalen Wurfhöhe.

Beweis für ein Maximum an der Stelle x_h: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$$\frac{d^2y}{dx_h^2} = \frac{dy}{dx_h}\left[\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}[x_h - x_0]\right] = -\frac{g}{v_{0x}^2} < 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Damit zeigt die Stelle x_h ein echtes Maximum der Wurfhöhe.

eingesetzt in (5):

$$y_h = (x_h - x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x_h - x_0]^2 + y_0$$

$$y_h = (x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} - x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} - x_0]^2 + y_0$$

$$y_h = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}[\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}]^2 + y_0$$

$$y_h = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{g}{2v_{0x}^2}\frac{v_{0x}^2v_{0y}^2}{g^2} + y_0$$

$$y_h = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0$$

$$\boxed{y_h = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}} \quad (15)$$

An der Maximalstelle x_h (14) wird dann die grösste Wurfhöhe y_h (15) erreicht.
Die Gleichung (15) für die Wurfhöhe ist identisch mit Gleichung (8).

Aufprallgeschwindigkeit

Geschwindigkeit in x-Richtung:
$v_x(t) = v_{0x}$ (1)

Geschwindigkeit in y-Richtung:
$v_y(t) = -gt + v_{0y}$ (2)

Aufprallgeschwindigkeit aus Superpositionsprinzip der Geschwindigkeiten $v_x(t), v_y(t)$ und mit Wurfdauer t_w :
$v_p = \sqrt{v_x^2(t_w) + v_y^2(t_w)}$ (~19)

$v_p = \sqrt{v_{0x}^2 + [-gt_w + v_{0y}]^2}$

Mit der Gleichung (9) für die Wurfzeit

$$\boxed{t_w = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}} \quad (9)$$

folgt:

$$\boxed{v_p = \sqrt{v_{0x}^2 + [v_{0y} - gt_w]^2}} \quad (16)$$