Regression: Allgemeine Gleichung 2. Ordnung

Quellen

Wikipedia : Carl Friedrich Gauss
Wikipedia : Gaußsches Eliminationsverfahren
Wikipedia : Cramersche Regel
OpenHardSoftWare.de : Cramersche Regel

Übersicht

Allgemeine Gleichung 2. Grades in impliziter Form:

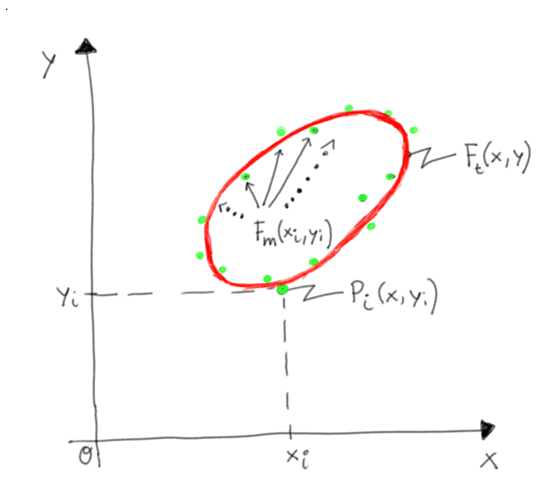
$$\boxed{F(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - 1} \quad (1)$$

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{F_{theory}(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - 1} \quad (1.1)$$

$$\boxed{F_{measure}(x_i,y_i) = ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i - 1} \quad (1.2)$$

Dabei gilt die Nicht-Identität für alle gegebenen Punkte:
$\forall P_i(x_i, y_i) \neq \forall P_j(x_j, y_j)$
mit N : Anzahl der Punkte P_i und $i, j \in [5, .., N]$



Allgemeine Gleichung zweiten Grades(hier Ellipse) mit gegebenen Punkten

Herleitung

Allgemeine Gleichung 2. Grades:

$$F^\star(x,y) = 0 = a^\star x^2 + b^\star y^2 + c^\star xy + d^\star x + e^\star y + f^\star$$

Identisch zu (Division durch $-f$):

$$\boxed{F(x,y) := ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - 1} \quad \text{(1)*}$$

ohne Einschränkung der Allgemeinheit.
Damit gilt es, die (linearen) Koeffizienten a, b, c, d, e zu bei einer gegebenen Punktemenge $P_i = (x_i, y_i)$ zu berechnen.

Die "Methode der kleinsten Fehlerquadrate" nach Carl Friedrich Gauss liefert folgenden Ansatz:

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{N} \left[F_m(x,y) - F_t(x,y)\right]^2} \quad \text{(2)}$$

mit:

$$F_{theory}(x,y) = F_t(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - 1 = 0 \quad \text{(1.1)*}$$

und:

$$F_{measure}(x,y) = F_m(x_i,y_i) = ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i - 1 \quad \text{(1.2)*}$$

ergibt sich:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[F_m(x_i,y_i) - F_t(x,y)\right]^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[F_m(x_i,y_i) - 0\right]^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[F_m(x_i,y_i)\right]^2$$

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{N} \left[ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i - 1\right]^2} \quad (3)$$

Notwendige Bedingungen, damit die Koeffizienten $a, b, .., e$ optimal mit kleinstem Fehler durch die Punkte $P_i(xi, y_i)$ gefittet werden:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 = 2\sum_i \left[ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i - 1\right]\left[x_i^2\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = 2\sum_i \left[ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i - 1\right]\left[y_i^2\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0 = 2\sum_i \left[ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i - 1\right]\left[x_iy_i\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial d} = 0 = 2\sum_i \left[ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i - 1\right]\left[x_i\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial e} = 0 = 2\sum_i \left[ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i - 1\right]\left[y_i\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 = \sum_i \left[ax_i^4 + bx_i^2y_i^2 + cx_i^3y_i + dx_i^3 + ex_i^2y_i - x_i^2\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = \sum_i \left[ax_i^2y_i^2 + by_i^4 + cx_iy_i^3 + dx_iy_i^2 + ey_i^3 - y_i^2\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0 = \sum_i \left[ax_i^3y_i + bx_iy_i^3 + cx_i^2y_i^2 + dx_i^2y_i + ex_iy_i^2 - x_iy_i\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial d} = 0 = \sum_i \left[ax_i^3 + bx_iy_i^2 + cx_i^2y_i + dx_i^2 + ex_iy_i - x_i\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial e} = 0 = \sum_i \left[ax_i^2y_i + by_i^3 + cx_iy_i^2 + dx_iy_i + ey_i^2 - y_i\right]$$

$$a\sum_i x_i^4 + b\sum_i x_i^2y_i^2 + c\sum_i x_i^3y_i + d\sum_i x_i^3 + e\sum_i x_i^2y_i = \sum_i x_i^2$$

$$a\sum_i x_i^2y_i^2 + b\sum_i y_i^4 + c\sum_i x_iy_i^3 + d\sum_i x_iy_i^2 + e\sum_i y_i^3 = \sum_i y_i^2$$

$$a\sum_i x_i^3y_i + b\sum_i x_iy_i^3 + c\sum_i x_i^2y_i^2 + d\sum_i x_i^2y_i + e\sum_i x_iy_i^2 = \sum_i x_iy_i$$

$$a\sum_i x_i^3 + b\sum_i x_i y_i^2 + c\sum_i x_i^2 y_i + d\sum_i x_i^2 + e\sum_i x_i y_i = \sum_i x_i$$

$$a\sum_i x_i^2 y_i + b\sum_i y_i^3 + c\sum_i x_i y_i^2 + d\sum_i x_i y_i + e\sum_i y_i^2 = \sum_i y_i$$

Daher folgt ein lineares Gleichungssystem der Unbekannten a, b, c, d, e :

$$\begin{array}{cccccc}
a & b & c & d & e & iT \\
\end{array}$$
$$\begin{pmatrix}
\sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^2 y_i^2 & \sum_i x_i^3 y_i & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 y_i & \sum_i x_i^2 \\
\sum_i x_i^2 y_i^2 & \sum_i y_i^4 & \sum_i x_i y_i^3 & \sum_i x_i y_i^2 & \sum_i y_i^3 & \sum_i y_i^2 \\
\sum_i x_i^3 y_i & \sum_i x_i y_i^3 & \sum_i x_i^2 y_i^2 & \sum_i x_i^2 y_i & \sum_i x_i y_i^2 & \sum_i x_i y_i \\
\sum_i x_i^3 & \sum_i x_i y_i^2 & \sum_i x_i^2 y_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i & \sum_i x_i \\
\sum_i x_i^2 y_i & \sum_i y_i^3 & \sum_i x_i y_i^2 & \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 & \sum_i y_i
\end{pmatrix}$$

Die Lösungen für a, b, c, d, e ergeben sich prinzipiell aus der Cramerschen Regel:

$$\boxed{a = \frac{D_a}{D}} \quad \boxed{b = \frac{D_b}{D}} \quad \boxed{c = \frac{D_c}{D}} \quad \boxed{d = \frac{D_d}{D}} \quad \boxed{e = \frac{D_e}{D}}$$

Da die Anzahl der Unbekannten a, b, c, d, e die Zahl 4 überschreitet, eignet sich das Gaußsche Eliminationsverfahren zur effizienten Bestimmung der Unbekannten.