Hauptachsen-Transformation

ToDo

- Die Fälle 1. - 4. müssen noch überarbeitet werden !!!
- Python Programm "Gaußsches Eliminationsverfahren" muss geschrieben werden!!!
- Python Demo-Programm muss geschrieben werden!!!
- Gleichung (20) muss mit Python-Programm geprüft werden!!!

Quellen

mathebibel.de : Eigenvektoren berechnen

[Wikipedia](#) : Hauptachsentransformation

[Wikipedia](#) : Kegelschnitt

[Wikipedia](#) : Drehmatrix

Download als PDF-Dokument : [2206191749_MajorAxisTransformation.pdf](#)

Übersicht

Die allgemeine Gleichung 2. Grades beschreibt in der 2-dimensionalen $x * y \in \mathbb{R}^2$ XY-Ebene eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel in gedrehter Ursprung-Nicht-Mittelpunkt-Lage:

$$F(x, y) = a^* x^2 + b^* y^2 + c^* xy + d^* x + e^* y + f = 0 \quad (1)$$

Gleichung (1) kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit in Gleichung (2) überführt werden:

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + 1 = 0 \quad (2)$$

Dabei geben die Terme " dx " und " ey " ein Mass der Verschiebung vom Ursprung und " cxy " ein Mass der Drehung bezüglich der Achsen des Koordinatensystems an.

Ziel der Hauptachsentransformation:

Gleichung (2) soll in eine Gleichung ohne Dreh- bzw. gemischten Term " cxy " umgeformt werden:

$$F(x', y') = \bar{a}x'^2 + \bar{b}y'^2 + \bar{d}x' + \bar{e}y' + 1 = 0 \quad (3)$$

Zusammen mit quadratischer Ergänzung in " x, x^2 " und " y, y^2 " ergibt sich dann (in unserem Fall eine Ellipse) eine Gleichung (4) der Form:

$$F(x', y') = \frac{(x' - x_m)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y' - y_m)^2}{\bar{b}^2} = 1 \quad (4)$$

Herleitung

Gegeben

Gleichung (2):

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + 1 = 0$$

In Matrizen-Schreibweise umformen:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + 1 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + dx + ey + 1 = 0$$

Formal:

$$F(x, y) = \vec{x}^T A \vec{x} + dx + ey + 1 = 0 \quad \text{mit } \vec{x}^T = (x, y) \quad \text{und der symmetrischen Matrix } A:$$

$$A := \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \quad (5)$$

Eigenwerte der Matrix A

Eigenwerte der symmetrischen (2, 2) - Matrix A als Lösung der Eigenwertgleichung:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (6)$$

mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 :

$$D(\lambda) = \det[A - \lambda E] = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$D(\lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda) - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$D(\lambda) = ab - b\lambda - a\lambda + \lambda^2 - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$D(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{(a + b)^2}{4} - ab$$

$$\left[\lambda - \frac{a + b}{2} \right]^2 = \frac{(a + b)^2 - 4ab + c^2}{4}$$

$$\lambda_{12} - \frac{a + b}{2} = \pm \sqrt{\frac{(a + b)^2 - 4ab + c^2}{4}}$$

$$\lambda_{12} = \frac{a + b}{2} \pm \frac{\sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{2}$$

$$\lambda_{12} = \frac{a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{2}$$

und damit berechnen sich die Eigenwerte λ_1 und λ_2 zu:

$$\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{2} \quad (7)$$

$$\lambda_2 = \frac{a + b - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{2} \quad (8)$$

Eigenvektoren der Matrix A

Aufgrund der beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 erhalten wir zwei Gleichungssysteme und damit die Eigenvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$:

$$(A - \lambda_1 E)\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a - \lambda_1 & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

$$(A - \lambda_2 E)\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda_2 & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

Aus (9) ergeben sich die Gleichungen:

$$\boxed{(a - \lambda_1)e_{1x} + \frac{c}{2}e_{1y} = 0} \quad (11)$$

$$\boxed{\frac{c}{2}e_{1x} + (b - \lambda_1)e_{1y} = 0} \quad (12)$$

Gleichung (7) in Gleichung (11):

$$(a - \lambda_1)e_{1x} + \frac{c}{2}e_{1y} = 0$$

$$\frac{2a - a - b - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{2}e_{1x} + \frac{c}{2}e_{1y} = 0$$

$$\boxed{[a - b - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}]e_{1x} + ce_{1y} = 0} \quad (13)$$

Gleichung (7) in Gleichung (12):

$$\frac{c}{2}e_{1x} + (b - \lambda_1)e_{1y} = 0$$

$$\frac{c}{2}e_{1x} + \left(b - \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{2}\right)e_{1y} = 0$$

$$\frac{c}{2}e_{1x} + \left(\frac{2b - a - b - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{2}\right)e_{1y} = 0$$

$$\boxed{[b - a - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}]e_{1x} + ce_{1y} = 0} \quad (14)$$

in expliziter Form für e_{1y} :

$$\boxed{e_{1y} = \frac{a - b + \sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{c}e_{1x}} \quad (15)$$

!!! die folgenden Fälle müssen noch überarbeitet werden !!!

Fall 1:

$$[a - b - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}] \neq 0 \text{ und } c \neq 0$$

- wähle $e_{1x} := 1$
- berechne e_{1y} aus Gleichung (15)

$$\frac{c}{2}e_{1x} + (b - \lambda_1)e_{1y} = 0$$

$$\text{Fall 2: } [a - b - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}] = 0 \text{ und } c \neq 0$$

- wähle $e_{1x} := 1$

- berechne e_{1y} aus Gleichung (15)

Fall 3: $[a - b - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}] \neq 0$ und $c = 0$

- wähle $e_{1y} := 1$
- berechne e_{1x} aus Gleichung (15)

Fall 4: $[a - b - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}] = 0$ und $c = 0$

- wähle $e_{1x} := 0$
- berechne e_{1y} aus Gleichung (15)

Entsprechend berechnet sich der Eigenvektor $\vec{e}_2 = (e_{2x}, e_{2y})^T$

Normierung eines Eigenvektors $\vec{e} = (e_x, e_y)^T$:

$$\vec{e} = \left(\frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} \right)^T \quad (16)$$

Ergebnis:

$$\vec{e}_1 = (e_{1x}, e_{1y})^T \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = (e_{2x}, e_{2y})^T \quad (17)$$

Transformationsmatrix

Aufstellen der Transformationsmatrix S mit spaltenweiser Anordnung der Eigenvektoren:

$$S := \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} \\ e_{1y} & e_{2y} \end{pmatrix} \quad (18.1)$$

Transformation, ersetze x, y durch u, v :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} \\ e_{1y} & e_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (18.2)$$

Entsprechende Drehmatrix R um den Drehwinkel α :

$$R = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} \\ e_{1y} & e_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ergibt:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = -\frac{e_{2x}}{e_{1x}} = \frac{e_{1y}}{e_{2y}} \quad (19)$$

Damit wird die Gleichung (2) :

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + 1 = 0$$

übergeführt in:

$$\boxed{\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \epsilon u + \delta v + \omega = 0} \quad (20)$$

"Beweis" durch Einsetzen:

Transformationen für x, y (Gleichung 18.2):

$$x = e_{1x}u + e_{2x}v$$

$$y = e_{1y}u + e_{2y}v$$

in Gleichung (2):

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + 1 = 0$$

einsetzen:

$$-1 = a[e_{1x}u + e_{2x}v]^2 + b[e_{1y}u + e_{2y}v]^2 + c[e_{1x}u + e_{2x}v][e_{1y}u + e_{2y}v] + d[e_{1x}u + e_{2x}v] + e[e_{1y}u + e_{2y}v]$$

$$-1 = ae_{1x}^2 u^2 + ae_{2x}^2 v^2 + 2ae_{1x}e_{2x}uv + 2be_{1y}^2 u^2 + be_{2y}^2 v^2 + 2be_{1y}e_{2y}uv + ce_{1x}e_{1y}u^2 + ce_{1y}e_{2y}uv + ce_{1y}e_{2x}uv + ce_{2x}e_{2y}v^2 + de_{1x}u + de_{2x}v + ee_{1y}u + ee_{2y}v$$

$$-1 = u^2[ae_{1x}^2 + be_{1y}^2 + ce_{1x}e_{1y}] + v^2[ae_{2x}^2 + be_{2y}^2 + ce_{2x}e_{2y}] + uv[2ae_{1x}e_{2x} + 2be_{1y}e_{2y} + ce_{1y}e_{2y} + ce_{1y}e_{2x}] + u[de_{1x} + ee_{1y}] + v[de_{2x} + ee_{2y}]$$

(???richtig???) Einschub: Probe: gemischter uv -Term muss Null werden:

$$0 \stackrel{!}{=} [2ae_{1x}e_{2x} + 2be_{1y}e_{2y} + ce_{1y}e_{2y} + ce_{1y}e_{2x}]$$

damit:

$$0 = u^2[ae_{1x}^2 + be_{1y}^2 + ce_{1x}e_{1y}] + v^2[ae_{2x}^2 + be_{2y}^2 + ce_{2x}e_{2y}] + u[de_{1x} + ee_{1y}] + v[de_{2x} + ee_{2y}] + 1$$

Vergleich mit Gleichung (20):

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \epsilon u + \delta v + \omega = 0$$

$$\Rightarrow \text{PROOF!!!} \quad \boxed{\lambda_1 = ae_{1x}^2 + be_{1y}^2 + ce_{1x}e_{1y}}$$

$$\Rightarrow \text{PROOF!!!} \quad \boxed{\lambda_2 = ae_{2x}^2 + be_{2y}^2 + ce_{2x}e_{2y}}$$

$$\Rightarrow \text{PROOF!!! } \boxed{\epsilon = de_{1x} + ee_{1y}}$$

$$\Rightarrow \text{PROOF!!! } \boxed{\delta = de_{2x} + ee_{2y}}$$

$$\Rightarrow \text{PROOF!!! } \boxed{\omega = 1}$$

Die Gleichung (20) beschreibt in den neuen Koordinaten u, v eine achsenparallele Ellipse!

Die Normalform findet sich durch quadratische Ergänzung:

$$\lambda_1 \left[u^2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1} u \right] + \lambda_2 \left[v^2 + \frac{\delta}{\lambda_2} v \right] = -\omega$$

$$\lambda_1 \left[u + \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \right]^2 + \lambda_2 \left[v^2 + \frac{\delta}{\lambda_2} v \right] = \frac{\epsilon^2}{4\lambda_1^2} - \omega$$

$$\lambda_1 \left[u + \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \right]^2 + \lambda_2 \left[v + \frac{\delta}{2\lambda_2} \right]^2 = \frac{\epsilon^2}{4\lambda_1^2} + \frac{\delta^2}{4\lambda_2^2} - \omega$$

$$\lambda_1 \left[u + \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \right]^2 + \lambda_2 \left[v + \frac{\delta}{2\lambda_2} \right]^2 = \frac{\epsilon^2 \lambda_2^2 + \delta^2 \lambda_1^2 - 4\omega \lambda_1^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2}$$

$$\boxed{\frac{4\lambda_1^3 \lambda_2^2 \left[u + \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \right]^2}{\epsilon^2 \lambda_2^2 + \delta^2 \lambda_1^2 - 4\omega \lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{4\lambda_1^2 \lambda_2^3 \left[v + \frac{\delta}{2\lambda_2} \right]^2}{\epsilon^2 \lambda_2^2 + \delta^2 \lambda_1^2 - 4\omega \lambda_1^2 \lambda_2^2} = 1}$$

Mit den Definitionen für die grosse und kleine Halbachse a, b und die Mittelpunktsverschiebung $M = (u_m, v_m)$:

$$\boxed{a^2 := \frac{\epsilon^2 \lambda_2^2 + \delta^2 \lambda_1^2 - 4\omega \lambda_1^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^3 \lambda_2^2}}$$

$$\boxed{b^2 := \frac{\epsilon^2 \lambda_2^2 + \delta^2 \lambda_1^2 - 4\omega \lambda_1^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^3}}$$

$$\boxed{u_m := -\frac{\epsilon}{2\lambda_1}}$$

$$\boxed{v_m := -\frac{\delta}{2\lambda_2}}$$

folgt die Normalform der Ellipse im gedrehten achsenparallelen u, v -Koordinatensystem:

$$\frac{(u - u_m)^2}{a^2} + \frac{(v - v_m)^2}{b^2} = 1$$

- Die Fälle 1. - 4. müssen noch überarbeitet werden !!!
- Python Programm "Gaußsches Eliminationsverfahren" muss geschrieben werden!!!
- Python Demo-Programm muss geschrieben werden!!!
- Gleichung (20) muss mit Python-Programm geprüft werden!!!