Algebra - Quadratische Ergänzung

1. Quadratische Ergänzung: Spezielle "p-q-Formel"

Gegeben:

Das Polynom $f(x) = y(x) = y = x^2 + px + q$ (1.1)
mit den Konstanten $p, q \in \mathbb{R}$ und Variablen $x, y(x) \in \mathbb{R}$.

Gesucht:

Nullstelle(n) des Polynoms (1.1) unter der Bedingung:
 $y(x_i) = 0$

Lösung:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (2.2)$$

Fallunterscheidung:

1. Argument der Wurzel $0 < \frac{p^2}{4} - q \Leftrightarrow \frac{p^2}{4} > q$
 $\Rightarrow$ 2 Lösungen und damit zwei Nullstellen:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

2. Argument der Wurzel $0 = \frac{p^2}{4} - q \Leftrightarrow \frac{p^2}{4} = q$
 $\Rightarrow$ 1 Lösung und damit eine Nullstelle:

$$x_1 = -\frac{p}{2}$$

3. Argument der Wurzel $\frac{p^2}{4} - q < 0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{4} < q$
 $\Rightarrow$ Keine Lösung und damit keine Nullstelle!

Rechenweg:

Polynom mit Bedingung $y(x_i) = 0$:

$$0 = y(x_i) = x_i^2 + px_i + q$$

$$x_i^2 + px_i + q = 0 \quad |$$

Trick unter Verwendung der Binomischen Gleichung: $(x + u)^2 = x^2 + 2ux + u^2$

Setze $u := \frac{p}{2}$ und ergänze den Nullterm: $0 = +\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}$:

$$x_i^2 + px_i + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

Dabei entspricht der Term:

$$x_i^2 + px_i + \frac{p^2}{4} = \left(x_i + \frac{p}{2}\right)^2$$

und damit folgt:

$$\left(x_i + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \quad | + \frac{p^2}{4} - q$$

$$\left(x_i + \frac{p}{2}\right)^2 = +\frac{p^2}{4} - q \quad | \sqrt{\cdot} = \cdot \quad (\text{auf beiden Seiten Wurzel ziehen})$$

$$x_{12} + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad | - \frac{p}{2} \quad (\text{daher prinzipiell zwei Lösungen } x_{12})$$

$$\boxed{x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

2. Quadratische Ergänzung: Allgemeine "p-q-Formel"

Gegeben:

$$\text{Das Polynom } \boxed{f(x) = y(x) = y = ax^2 + px + q} \quad (2.1)$$

mit den Konstanten $a, p, q \in \mathbb{R}$ und Variablen $x, y(x) \in \mathbb{R}$,
weiterhin: $a \neq 0$

Gesucht:

Nullstelle(n) des Polynoms (2.1) unter der Bedingung:

$$y(x_i) = 0$$

Lösung:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2a} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a}}} \quad (2.2)$$

Fallunterscheidung:

$$1. \text{ Argument der Wurzel } 0 < \frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a} \Leftrightarrow \frac{p^2}{4a^2} > \frac{q}{a}$$

$\Rightarrow$ 2 Lösungen und damit zwei Nullstellen:

$$\boxed{x_1 = -\frac{p}{2a} + \sqrt{\frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a}}}$$

$$\boxed{x_2 = -\frac{p}{2a} - \sqrt{\frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a}}}$$

$$2. \text{ Argument der Wurzel } 0 = \frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a} \Leftrightarrow \frac{p^2}{4a^2} = \frac{q}{a}$$

$\Rightarrow$ 1 Lösung und damit eine Nullstelle:

$$\boxed{x_1 = -\frac{p}{2a}}$$

$$3. \text{ Argument der Wurzel } \frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{4a^2} < \frac{q}{a}$$

$\Rightarrow$ Keine Lösung und damit keine Nullstelle!

Rechenweg:

Polynom mit Bedingung $y(x_i) = 0$:

$$0 = y(x_i) = ax_i^2 + px_i + q$$

$$ax_i^2 + px_i + q = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{a} \right.$$

$$x_i^2 + \frac{p}{a}x_i + \frac{q}{a} = 0$$

Trick unter Verwendung der Binomischen Gleichung: $(x + u)^2 = x^2 + 2ux + u^2$

Setze $u := \frac{p}{2a}$ und ergänze den Nullterm: $0 = +\frac{p^2}{4a^2} - \frac{p^2}{4a^2}$:

$$x_i^2 + \frac{p}{a}x_i + \frac{p^2}{4a^2} - \frac{p^2}{4a^2} + \frac{q}{a} = 0$$

Dabei entspricht der Term:

$$x_i^2 + \frac{p}{a}x_i + \frac{p^2}{4a^2} = \left(x_i + \frac{p}{2a}\right)^2$$

und damit folgt:

$$\left(x_i + \frac{p}{2a}\right)^2 - \frac{p^2}{4a^2} + \frac{q}{a} = 0 \quad \left| +\frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a} \right.$$

$$\left(x_i + \frac{p}{2a}\right)^2 = +\frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a} \quad \left| \sqrt{\cdot} = \cdot \right. \quad (\text{auf beiden Seiten Wurzel ziehen})$$

$$x_{1,2} + \frac{p}{2a} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a}} \quad \left| -\frac{p}{2a} \right. \quad (\text{daher prinzipiell zwei Lösungen } x_{1,2})$$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2a} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4a^2} - \frac{q}{a}}}$$