

Algebra - Rechenregeln

Übersicht

Regeln für:

- Gleichheitszeichen
- Strichrechnung
- Punktrechnung
- Potenzen
- Klammern

Erweiterung:

- Bruchrechnung

Rechen-Reihenfolge: 1. Klammern -> 2. Potenzen -> 3. Punktrechnung -> 4. Strichrechnung

Definitionen für das Rechnen mit Reellen Zahlen:

- Symbole $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$: damit sind $a, b, c, \dots$ **Reelle Zahlen** (Elemente der Vereinigungsmenge der "Ganzen Zahlen" und "Kommazahlen")
- $\Rightarrow$ heisst '**daraus folgt**' (bedeutet: aus linkem Term/linker Gleichung folgt rechter Term/rechte Gleichung)
- $\Leftrightarrow$ heisst '**äquivalent**' (bedeutet: links und rechts stehen gleiche und nicht dieselben Terme/Gleichungen)
- $\equiv$ heisst '**wird definiert als**' und damit: linke Seite wird definiert durch rechte Seite
- $\sim$ heisst '**proportional zu**' und damit: linke Seite proportional zu rechter Seite

Regeln

Gleichheitszeichen

Beispiele mit Gleichheitszeichen:

$$1 = 1$$

$$2 = 2$$

$$5 = 5$$

allgemein: $a = a$

Vorgriff:

$$5 = 2 + 3$$

$$2 + 3 = 5$$

allgemein: $a + b = c \Leftrightarrow c = c$

Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen muss immer der gleiche Wert stehen (vgl. Waage)!

Dies gilt immer bei Umformungen von einer Ausgangsgleichung zu einer Ergebnisgleichung:

$$2 + 3 = 5$$

ergibt: $5 = 5$

Strichrechnung

Beispiele mit Plus:

$$1 + 2 = 3$$

$$3 + 5 = 8$$

allgemein: $a + b = c$

und Minus:

$$3 - 2 = 1$$

$$8 - 5 = 3$$

allgemein: $a - b = c$

Punktrechnung

Beispiele mit "Mal"(Multiplikation):

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

allgemein: $a \cdot b = c = ab, ab$ d.h. Malzeichen kann auch weggelassen werden!

und "Geteilt"(Division):

$$3/1 = \frac{3}{1} = 3$$

$$8/2 = \frac{8}{2} = 4$$

allgemein Division: $a/b = \frac{a}{b} = c$

Potenzen

a^b heisst a hoch b

bedeutet: b mal a als Faktor (also mit Malzeichen!) hinschreiben

Beispiel:

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1 (!)$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

allgemein: $a^2 = a \cdot a$

ebenso: $a^3 = a \cdot a \cdot a$

und: $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

Spezialfall: $a^0 =: 1$

Beispiel: $3^0 = 1$

Klammern

Grundregel: Klammern besitzen die höchste "Rechenstufe" gegen über Potenzen, Punktrechnung und Strichrechnung

Ausmultiplizieren der Klammer:

Beispiel: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 9 = 27 \Leftrightarrow 3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$

allgemein: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = a(b + c) = ab + bc$

Beispiel: $7 \cdot (5 - 3) = 7 \cdot 2 = 14 \Leftrightarrow 7 \cdot (5 - 3) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 35 - 21 = 14$

allgemein: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - b \cdot c = a(b - c) = ab - bc$

Bruchrechnung

auch hier gilt die Rechen-Reihenfolge: Klammern -> Potenzen -> Punktrechnung -> Strichrechnung

Strichrechnung mit Brüchen:

Addition: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$ (Voraussetzung gleiche Nenner!)

Beispiel (Prüfe mit Taschenrechner!): $\frac{3}{7} + \frac{11}{6} = \frac{3 \cdot 6}{7 \cdot 6} + \frac{11 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{18}{42} + \frac{77}{42} = \frac{18 + 77}{42} =$
 $\frac{95}{42} = \frac{5 \cdot 19}{2 \cdot 21}$

Subtraktion: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$ (Voraussetzung gleiche Nenner!)

Punktrechnung mit Brüchen:

Multiplikation: $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{ab}{cd}$ ((Zähler · Zähler) durch (Nenner · Nenner!))

Division: $\frac{a}{c} / \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} = \frac{ad}{bc}$ (mit Kehrbruch multiplizieren!)

Erweitern/Kürzen von Brüchen:

Erweitern:

Beispiel: $3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{6}{2} = 3$

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{u}{v}$: Zähler UND Nenner mit derselben Zahl!

multiplizieren und damit den Wert des Bruches NICHT ändern!

Kürzen:

Beispiel: $3 = \frac{12}{4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3}{1} = 3$

$\frac{a}{b} = \frac{u \cdot k}{v \cdot k} = \frac{u}{v}$ damit besitzen Zähler und Nenner einen

gemeinsamen Faktor, durch diesen Faktor werden Zähler UND Nenner

geteilt und damit gekürzt und damit der Wert des Bruches NICHT geändert!