

Komplexe Widerstände

Übersicht

Definitionen

$U : [U] = V$: Spannung in Volt

$U(t) = U_0 e^{j(\omega t + \phi)}$: komplexe Spannung

$I : [I] = A$: Strom in Ampere

$I(t) = I_0 e^{j(\omega t + \psi)}$: komplexer Strom

$Z = Z_0 e^{j\phi} = R + jX$: komplexer Widerstand

Hilfsmittel: Komplexe Algebra

www.openhardsoftware.de : Komplexe Algebra

Download

als PDF-Dokument : [2304031800_ComplexResistance.pdf](#)

Das Ohmsche Gesetz

Ohmsches Gesetz reell : $U = RI$

Spannung reell

$U = U(t)$: $[U] = V$

Strom reell

$I = I(t)$: $[I] = A = \frac{C}{s}$

Ohmscher Widerstand reell

$R = \frac{U}{I}$: $[R] = \frac{V}{A} = \Omega$

Ohmsches Gesetz komplex : $U = ZI$

Spannung komplex

$U = U(t) = U_0 \exp[j(\omega t + \phi)]$: $[U] = V$

Strom komplex

$$I = I(t) = I_0 \exp[j(\omega t + \psi)] : \text{Strom, } [I] = A$$

Ohmscher Widerstand komplex

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0 \exp(j\omega t + j\phi)}{I_0 \exp(j\omega t + j\psi)} = \frac{U_0}{I_0} \exp(j(\phi - \psi)) : [Z] = \frac{V}{A} = \Omega$$

Beispiel: Kondensator

$$\text{Ohmsches Gesetz : } U_c = X_c I_c$$

$$\text{Komplexer Widerstand Kondensator : } Z_c = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

Nebenrechnung Dimension :

$$[Z_c] = \frac{V}{A} = [-j \frac{1}{\omega C}] = [-j \frac{U}{2\pi f Q}] = \frac{Vs}{As} = \Omega \{ \text{mit : } C = \frac{Q}{U} \}$$

$$U_c = \frac{I_c}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} I_c = Z_c I_c$$

$$Z_c = -j \frac{1}{\omega C}, \operatorname{Re}(Z_c) = 0, \operatorname{Im}(Z_c) = -\frac{1}{\omega C}$$

$$|Z_c| = \sqrt{\operatorname{Re}(Z_c)^2 + \operatorname{Im}(Z_c)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\phi_c = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(Z_c)}{\operatorname{Re}(Z_c)}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{0 \cdot \omega C}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$U_c = Z_c I_c \Rightarrow U_c = |Z_c| I_c \exp(-j\frac{\pi}{2}) =$$

$$U_0 \exp(j\omega t + j\phi_u) = |Z_c| I_0 \exp(j\omega t + j\phi_i + j\phi_c) = |Z_c| I_0 \exp(j\omega t - j\frac{\pi}{2})$$

$$U_0 \exp(j\phi_u) = |Z_c| I_0 \exp(j\phi_i - j\frac{\pi}{2}) = |Z_c| I_0 (-j) \exp(j\phi_i)$$

Frequenzabhängiger Widerstand eines Kondensators:

$$U_0 = |Z_c| I_0 = \frac{1}{\omega C} I_0$$

$$\exp(j\phi_u) = -j \exp(j\phi_i) = \exp(j\phi_i - j\frac{\pi}{2})$$

$$\exp(j(\phi_u - \phi_i)) = \exp(-j\frac{\pi}{2})$$

Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom am Kondensator:

$$\phi_u - \phi_i = -\frac{\pi}{2}$$

Beispiel: Tiefpass

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_a}{Z_e + Z_a} := T_{lp}$$

$$\text{Sei } Z_a = \frac{1}{j\omega C} \text{ und } Z_e = R$$

$$\Rightarrow T = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)}$$

Übertragungsfunktion :

$$T_{lp} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$|T_{lp}| = \sqrt{\operatorname{Re}(T_{lp})^2 + \operatorname{Im}(T_{lp})^2} = \sqrt{\frac{1}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2} + \frac{\omega^2 R^2 C^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}}$$

Amplitudengang der Übertragungsfunktion Tlp:

$$|T_{lp}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\phi_T = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(T_{lp})}{\operatorname{Re}(T_{lp})}\right) = \arctan\left(-\frac{\frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}\right)$$

Phasengang der Übertragungsfunktion Tlp:

$$\phi_T = -\arctan(\omega RC)$$

Polardarstellung der Übertragungsfunktion Tlp:

$$T_{lp} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \exp[-j \arctan(\omega RC)]$$

Beispiel: Hochpass

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_a}{Z_e + Z_a} := T_{hp}$$

$$\text{Sei } Z_a = R \text{ und } Z_e = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\Rightarrow T_{hp} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega RC(1 - j\omega RC)}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)}$$

$$T_{hp} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$|T_{hp}| = \sqrt{\operatorname{Re}(T_{hp})^2 + \operatorname{Im}(T_{hp})^2} = \sqrt{\frac{\omega^4 R^4 C^4}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2} + \frac{\omega^2 R^2 C^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}}$$

$$|T_{hp}| = \sqrt{\frac{\omega^2 R^2 C^2 (1 + \omega^2 R^2 C^2)}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} = \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Amplitudengang der Übertragungsfunktion Thp:

$$|T_{hp}| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\phi_T = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(T_{hp})}{\operatorname{Re}(T_{hp})}\right) = \arctan\left(\frac{\omega RC}{\frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{\omega^2 R^2 C^2}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Phasengang der Übertragungsfunktion Thp:

$$\phi_T = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Polardarstellung der Übertragungsfunktion Thp:

$$T_{hp} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \exp \left[j \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \right]$$