ChatGPT : Solution of Two-Body-Problem

Das Zweikörperproblem ist ein klassisches Problem der Himmelsmechanik, bei dem zwei Massen unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Gravitationsanziehung beschrieben werden. Ziel ist es, die Bewegungsgleichungen zu lösen und die Bahnen der beiden Körper zu bestimmen.

Die Herleitung der expliziten Lösung des Zweikörperproblems erfolgt in mehreren Schritten:

1. Gesetz von Newton

Die Bewegung der beiden Körper wird durch das Newtonsche Gravitationsgesetz beschrieben:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

wobei:

- $\vec{F}$ die Gravitationskraft zwischen den beiden Körpern ist,
- G die Gravitationskonstante ist,
- m_1 und m_2 die Massen der beiden Körper sind,
- r der Abstand zwischen den beiden Körpern ist,
- $\hat{r}$ der Einheitsvektor in Richtung von Körper 1 zu Körper 2 ist.

2. Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen der beiden Körper lauten:

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}, \quad m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

wobei $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ die Ortsvektoren der beiden Körper und $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}$ ist.

3. Reduktion des Problems auf ein Ein-Körper-Problem

Es ist möglich, das Zweikörperproblem auf ein Ein-Körper-Problem zu reduzieren, indem man den Schwerpunkt des Systems und den Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ einführt:

$$\vec{R}_{\text{Schwerpunkt}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich dann trennen in:

1. Bewegung des Schwerpunkts (geradlinig und gleichförmig)
2. Relativbewegung der Körper zueinander, beschrieben durch den Relativvektor $\vec{r}$.

4. Einführung der reduzierten Masse

Man definiert die reduzierte Masse μ und erhält für die Relativbewegung:

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

wobei $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ die reduzierte Masse ist.

5. Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen können in Polarkoordinaten gelöst werden. Dafür setzt man:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r(t)$$

Die Radial- und Winkelbewegung entkoppeln sich in den folgenden Gleichungen:

- **Radialgleichung**:

$$\mu \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- **Drehimpulserhaltung**:

$$\mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = L = \text{konstant}$$

Die Lösung für den radialen Abstand $r(\theta)$ ergibt sich aus der Erhaltung der Gesamtenergie E und des Drehimpulses L:

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{G(m_1+m_2)}{L^2}(1 + e\cos\theta)$$

Hierbei ist e die Exzentrizität der Bahn.

6. Form der Bahn

Die explizite Lösung zeigt, dass die Bahn des Körpers eine Kegelschnittbahn ist (Ellipse, Parabel oder Hyperbel), wobei:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

mit $p = \frac{L^2}{G(m_1+m_2)\mu}$.

- **Elliptische Bahnen** $(e < 1)$
- **Parabolische Bahnen** $(e = 1)$
- **Hyperbolische Bahnen** $(e > 1)$

7. Zusammenfassung

Die Bewegung der beiden Körper unter dem Einfluss der Schwerkraft führt zu Bahnen, die Kegelschnitte sind. Die exakte Form der Bahn hängt von der Exzentrizität e ab, und die Bewegung kann vollständig durch die Drehimpulserhaltung und die Energieerhaltung beschrieben werden.